

Title	函数方程式 $f(x) = \frac{1}{2} \int_{x+1}^{x-1} f(t) dt$ 二就テ
Author(s)	泉, 信一
Citation	全国紙上数学談話会. 39 p.1-p.3
Issue Date	1935-04-30
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74045
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

123. 函数方程式

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt \text{ニツイテ}$$

泉 信一 (東北大)

南雲氏が函数方程式

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt \text{----- (1)}$$

ヲ満足スル函数 $f(x)$ = ツイテ研究サレタ、⁽¹⁾ コノニハ次ノ定理ヲ証明スル。

定理 モシ $f(x) \in L^2(-\infty, +\infty)$ 及ビ $f(x)$ ガ (1) ヲ満足スルナラバ、 $f(x)$ ハ恒等的ニ零デアアル。

証明 (1) カラ

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A f(x) e^{-uxi} dx &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A e^{-uxi} dx \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-(A-1)}^{A-1} f(t) dt \int_{t-1}^{t+1} e^{-uxi} dx + \int_{-A-1}^{-A+1} f(t) dt \int_{-A}^{t-1} e^{-uxi} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{A-1}^{A+1} f(t) dt \int_{t-1}^A e^{-uxi} dx \right] \end{aligned}$$

(1) 南雲, 三野, 角谷, 本紙上談話会, 第二十一号; 南雲, 角谷, 同紙第二十二号。

$$= \frac{-1}{2\sqrt{2\pi}ui} \left[\int_{-(A-1)}^{A-1} f(t) e^{-ut} (e^{-ui} - e^{ui}) dt \right. \\ \left. + \int_{-A-1}^{-A+1} f(t) (e^{-u(t-1)i} - e^{uAi}) dt + \int_{A-1}^{A+1} f(t) (e^{-Au} - e^{-u(t-1)i}) dt \right]$$

然ル =

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{u} \int_{-A-1}^{-A+1} f(t) (e^{-u(t-1)i} - e^{uAi}) dt \right|^2 du \leq K \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{1+u^2} \left(\int_{-A-1}^{-A+1} |f(t)| dt \right)^2 \\ \leq 2K \int_{-A-1}^{-A+1} |f(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{1+u^2}.$$

コゝ = K ハ定数デアル、故 =

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \int_{-A-1}^{-A+1} f(t) (e^{-u(t-1)i} - e^{uAi}) dt = 0$$

同様 =

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \int_{A-1}^{A+1} f(t) (e^{-Au} - e^{-u(t-1)i}) dt = 0$$

従ッテ $f(x)$, "Fourier transform" ヲ $F(u)$ トスルトキ、

殆ンドスベテ、 $u = \pm \infty$ 対シテ

$$F(u) = \frac{e^{-ui} - e^{ui}}{-2ui} F(u) = \cos u \cdot F(u)$$

故 = 殆ンドスベテ、 $u = \pm \infty$ 対シテ、 $F(u) = 0$, 従ッテ $f(x) = 0$.

然ル = $f(x)$ が (1) ヲ満足スルトキ、連続デアルカラ、 $f(x)$ ハ恒等的 = 零デアル。

注意. エノ定理 = 於テ L^2 ノ代リ = L^p ($2 \leq p < \infty$) デオキカ

ヘルコトが出来ル、ソノトキニハ *Plancherel* の定理、代
リニ *Titchmark* の定理ヲ用ヒレバヨイ。